**04.05. 2020 МАТЕМАТИКА 16 гр.** Преподаватель А.И.Русанов

(Выполненную работу отправить по электронной почте по адресу [alexander\_rus@inbox.ru](mailto:alexander_rus@inbox.ru) до 17.00).

**Тема: Понятие о производной функции, её геометрический и физический смысл.**

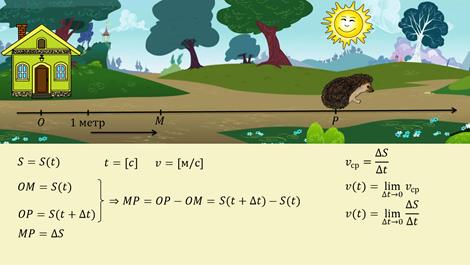
Цели :понятие производной, скорость изменения функции в точке, а также применение производной к расчету скорости в задачах по физике.

**Основные теоретические сведения**

Рассмотрим одну физическую задачу. Пусть ёжик движется по дорожке из домика. Домик будем считать точкой отсчёта и обозначим её точкой *O*. Единицей измерения выберем метр, и укажем направление движения ёжика. Закон движения ёжика задан формулой *S = s(t)*, где *t* – время (в секундах), *S(t)* – положение ёжика на дорожке (говоря математическим языком – координата движущегося ёжика) в момент времени *t* по отношению к началу отсчёта. Давайте найдём скорость движения ёжика в момент времени *t*. Скорость будем измерять в м/с. В данном случае ёжика будем рассматривать как материальную точку.

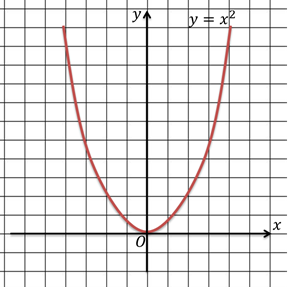
Предположим, что в момент времени *t* ёжик находился в точке *M*, тогда *OM*= *S(t)*. Дадим аргументу *t* приращение и рассмотрим, где же окажется ёжик в момент времени *t* + Δ*t*. Очевидно, что ёжик переместиться из точки *M*, например, в точку *P*. Тогда отрезок *OP* равен *S (t +*Δ*t)*.

Значит, если за Δ*t* секунд ёжик переместился из точки *M* в точку *P*, то отрезок *MP* равен *OP – OM*, то есть разности *S (t + Δt)* – *S(t)*, то есть отрезок *MP* = Δ*S* метров, причём перемещение из точки *M* в точку *P* произошло за Δ *t* секунд. Давайте вычислим среднюю скорость движения ёжика за промежуток времени от *t* до *t +*Δ*t*.



Определим такое понятие как «касательная к плоской кривой». При изучении функций в курсе алгебры базовой школы, вы уже встречались с термином касательная.

Например, что график функции *y = x2* касается оси *Ox* в точке *x = 0*, то есть ось *Ox* является ***касательной*** к параболе в точке *x = 0*.



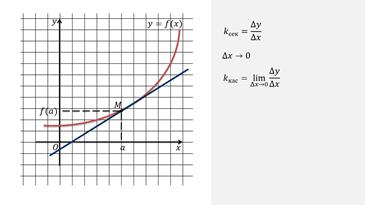
Однако возникает вопрос, что такое касательная? Казалось бы, все очень просто: касательная к графику функции – это такая прямая, которая имеет с графиком функции одну общую точку. Тогда почему нельзя назвать касательной ось *Oy*? Ведь с параболой эта ось тоже имеет только одну общую точку.

Посмотрим, как же определить касательную. Пусть дана кривая *L*, на ней выбрана точка *M*. Возьмём на ней ещё одну точку *P*, проведём секущую *MP*. Теперь давайте будем приближать точку *P* к точке *M* по кривой *L*. Секущая *MP* будет менять своё положение, как бы поворачиваясь вокруг точки *M*. Продолжая приближать точку *P* к точке *M*, мы достигнем такого положения прямой *MP*, которое будет предельным, эту прямую, которая является предельным положением секущей и называют **касательной** к кривой *L* в точке *M*.



Учитывая только что сформулированное определение, нетрудно доказать, что касательной к графику функции *y = x2* в точке о будет ось *Ox*.

Задачу 2. Пусть дан график функции *y = f(x)*. На нем выбрана точка *M* *(a; f(a))* и в этой точке к графику функции проведена касательная. Найдём угловой коэффициент касательной. Дадим аргументу приращение Δ*x* и рассмотрим на графике точку *P* с абсциссой *a* + Δ*x*. Тогда ордината точки *P* равна *f(a + Δx)*. Отношение приращения функции к приращению аргумента – это угловой коэффициент прямой, то есть угловой коэффициент секущей *MP* равен отношению Δ*y* к Δ*x*. Еcли же Δ*x* стремиться к нулю, то точка *P* начнёт приближаться к точке *M* по графику функции. Поскольку предельное положение секущей – это касательная, то получим, что угловой коэффициент касательной к графику функции равен пределу углового коэффициента секущей при Δ*x* стремящемся к нулю. Подставляя вместо углового коэффициента секущей формулу, получим, что угловой коэффициент касательной равен пределу отношения Δ*y* к Δ*x*, при Δ*x* стремящемся к нулю.



Не все касательные имеют угловой коэффициент. Например, если касательной к графику функции в точке является прямая *x = a*, то угловой коэффициент этой касательной не существует.

Итак, рассмотрели две задачи, в результате решения которых получили оду и туже формулу – предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Рассмотрели всего две задачи, однако при решении задач из других областей науки, например, экономики, химии, приходят к этой же формуле.

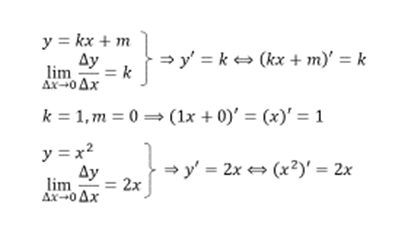
**Определение.**

Пусть функция *y = f(x)* определена в некотором интервале, содержащем внутри себя точку *x0*. Дадим аргументу приращение Δ*x* такое, чтобы не выйти из этого интервала. Найдём соответствующее приращение функции Δ*y*, при переходе от точки *x0* к точке *x + x0* и составим отношение Δ*y/*Δ*x*, если существует предел этого отношения при Δ*x* стремящемся к нулю, то указанный предел называют **производной функции** ***y = f(x)*** в точке *x0* и обозначают ***f'(x0)***.

Для обозначения производной часто используют символ *y'*.

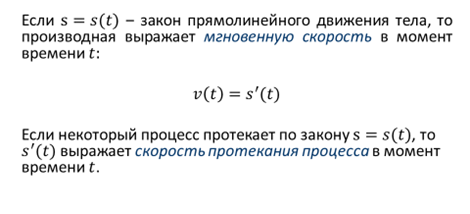
Отметим, что *y' = f'(x)* – это новая функция, но, естественно, связанная с функцией *y = f(x)*, определённая во всех точках *x*, в которой существует указанный выше предел.

Эту функцию называют **производная функции *y = f(x)***.

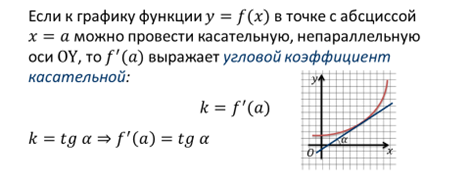


Учитывая, введённые понятия и определение можно сказать, что рассмотренные задачи показывают физический и геометрический смысл производной.

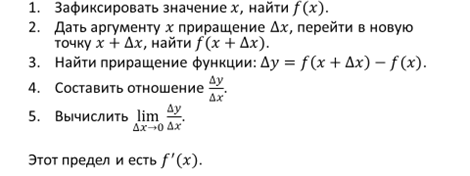
**Физический смысл производной.**



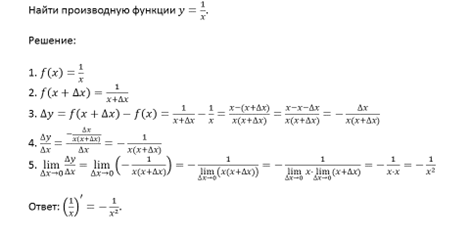
**Геометрический смысл производной.**



Сформулируем алгоритм нахождения производной функции *y = f(x)*.



**Пример.**



Если функция *y = f(x)* имеет производную в точке *x*, то её называют **дифференцируемой** в точке *x*. Процедуру нахождения производной функции *y = f(x)* называют **дифференцированием функции *y = f(x)***.

Попробуем найти связь между понятиями непрерывности и дифференцируемости функции в точке.

Пусть функция *y = f(x)* дифференцируема в точке *x*. Тогда, пользуясь геометрическим смыслом производной, в точке *M (x; f(x))*можно провести касательную, причём, угловой коэффициент этой касательной равен *f'(x)*. То есть в точке *M*не может быть разрыва, то есть функция *y = f(x)* непрерывна в точке икс.

Сформулируем это более строго. Если функция *y = f(x)* ***дифференцируема*** ***в точке x***, то она и *непрерывна* в этой точке.

Обратное утверждение не верно. Примером этого может служить функция *y = │x│*. Эта функция непрерывна везде, в том числе и в точке *x = 0*, но касательной в точке *x = 0* существует. Если в некоторой точке к графику функции нельзя провести касательную, то в этой точке не существует производная.

Попробуем ответить на вопрос: можно ли по графику функции сделать вывод по её дифференцируемости? Если в некоторой точке к графику функции *можно провести касательную, не перпендикулярную оси абсцисс*, то в этой точке *функция дифференцируема*. Если в некоторой точке *касательная к графику функции не существует* или она *перпендикулярна оси абсцисс*, то в этой точке *функция* *недефференцируема*.

Например.



Раздел математики, который изучает производные функции и их применения, называется **дифференциальным исчислением**. Это исчисление возникло из решений задач на проведение касательных к кривым, на вычисление скорости движения, на отыскание наибольших и наименьших значений функции.

Задача нахождения скорости изменения функции была впервые решена Ньютоном. Ньютон пришёл к понятию производной исходя из вопросов механики.

Основываясь на результатах Ферма и некоторых других выводах, Лейбниц в 1684 году опубликовал первую статью по дифференциальному исчислению, в которой были изложены основные правила дифференцирования.

Термин «производная» впервые встречается у француза Луи Арбогаста. Этим термином стал пользоваться Лагранж, который и ввёл обозначения *y'* и *f'(x)*.

Практическая часть

1. Точка движется по закону s (t) = 1 +3t. Найдите среднюю скорость движения за промежуток времени:

1) от t = 1 до t = 4; 2) от t = 0,8 до t = 1

2. Найдите среднюю скорость движения точки на отрезке [1; 1,2], если закон её движения s = s(t) задан формулой:

1) s (t) = 2t; 2) s (t) = t2.

3. Найдите мгновенную скорость движения точки, если:

1) s (t) = 2t + 1; 2) s (t) = 2 – 3t .

4. Закон движения задан формулой s (t) = 0,25 t + 2. Найти :

1) Среднюю скорость движения от t =4 до t= 8;

2) Скорость движения в моменты t =4 и t= 8;