**01.06. 2020 МАТЕМАТИКА 16 гр.** Преподаватель А.И.Русанов

(Выполненную работу отправить по электронной почте по адресу [alexander\_rus@inbox.ru](mailto:alexander_rus@inbox.ru) до 17.00).

**Применение производной к исследованию функции и построению графиков.**

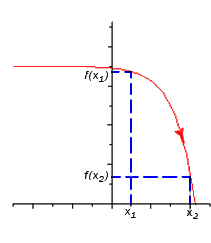
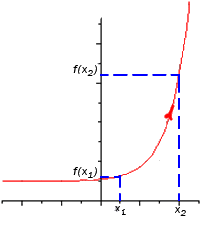
Цель:обеспечить усвоение студентами основных понятий ранее изученных тем; научить применять таблицу производных при исследовании функций и построении графиков;.

**Основные теоретические сведения**

1.Понятие производной – одно из важнейших в математике. С помощью производной учитывая её механический смысл и геометрический смысл, можно решать самые разнообразные задачи, относящиеся к любой области человеческой деятельности. В частности, с помощью производных стало возможным подробное исследование функций, что позволило очень точно строить их графики, находить их наибольшие и наименьшие значения и т. д.

Одной из основных задач, возникающих при исследовании функции, является нахождение **промежутков монотонности функции** (**промежутков возрастания и убывания**). Такой анализ легко сделать с помощью производной.

Функция y = *f(x)* называется **возрастающей** в некотором интервале, если в точках этого интервала большему значению аргумента соответствует большее значение функции, и **убывающей**, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.



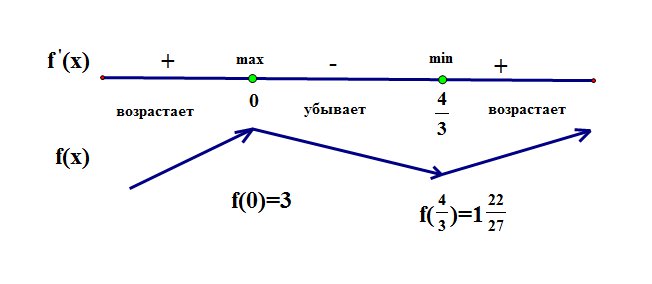
**2. Необходимый признак возрастания (убывания) функции.**

**Теорема 1.** Если дифференцируемая функция **возрастает (убывает)** в данном интервале, то **производная** **этой функции не отрицательна** **(не положительна) в этом интервале**.

**

Обратное заключение также справедливо, оно выражается следующей теоремой.

**Теорема 2.** Если производная функции **отрицательна (положительна)** на некотором интервале, то функция в этом интервале **монотонно** **возрастает (монотонно убывает)**.

**

Сформулируем теперь правило нахождения интервалов монотонности функции

1. Находим область определения функции *f* (*x*).
2. Вычисляем производную *f’*(*x*) данной функции.
3. Находим точки, в которых *f’*(*x)*=0 или не существует. Эти точки называются **критическими** для функции *f* (*x*).
4. Делим область определения функции этими точками на интервалы. Они являются **интервалами монотонности**.
5. Исследуем знак *f’*(*x*) на каждом интервале. Если , то на этом интервале  **возрастает**; если , то на таком интервале функция  **убывает**.

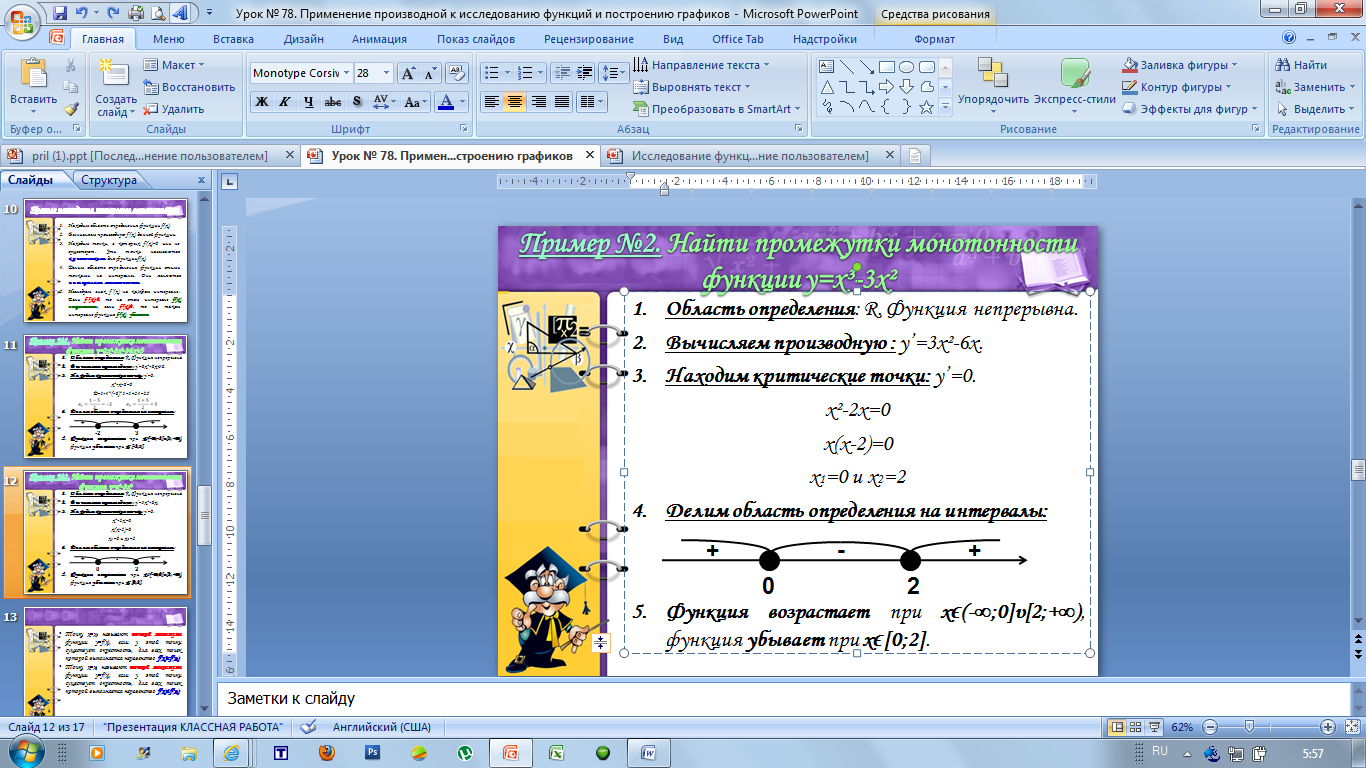
3. Рассмотрим теперь нахождение промежутков возрастания/убывания на конкретном примере функции.

Пример №1. Найти промежутки монотонности функции

1. **Область определения**: R. Функция непрерывна.
2. **Вычисляем производную :** y’= 3*x*²– 6*x*.
3. **Находим критические точки:**

и = 2

1. ***Делим область определения на интервалы:***

**

1. **Функция возрастает** при  **(-∞;0][2;+∞)**, функция **убывает** при **[0;2]**.

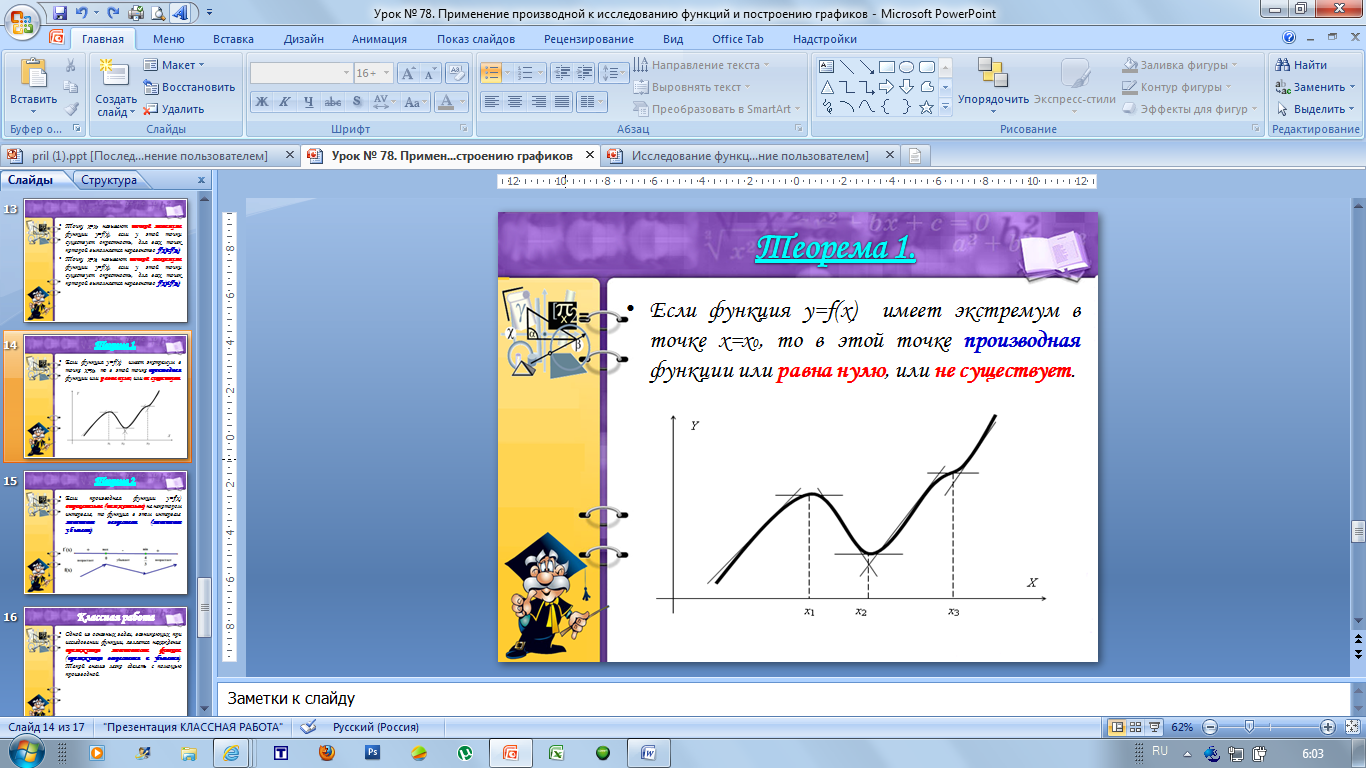
Но помимо монотонности функций с помощью первой производной можно ещё определить экстремумы функций (точки максимума/минимума).

Сначала введём необходимые определения и понятия.

Опр. 1. Точку называют **точкой минимума** функции y=*f*(*x*), если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство ***f* (*x*) ≥ *f* (*x*0)**.

Опр. 2. Точку *x* = *x*0 называют **точкой максимума** функции y= *f*(*x*), если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство ***f* (*x*) ≤ *f* (*x*0)**.

**Теорема 3.** Если функция y = *f* (*x*) имеет экстремум в точке *x* = *x*0, то в этой точке **производная** функции или **равна нулю**, или **не существует**.

**

Заметим, что теорема 3 является только **необходимым (но не достаточным)** условием существования экстремума: из того, что производная *f’*(*x*) в точке обращается в нуль, не обязательно следует, что в этой точке функция имеет экстремум.

Например, функция *f* (*x*) = *x*5 имеет производную *f’*(*x*)=5*x*4, которая обращается в нуль в точке *x*0 = 0. Однако экстремума в этой точке функция не имеет (происходит изменение кривизны).

Поэтому вводят ещё достаточный признак существования экстремумов функции.

**Теорема 4.** Если производная *f’* (*x*) при переходе через точку *x*0 меняет знак, то точка *x*0 является точкой экстремума функции *f* (*x*).

*Если производная меняет знак с* ***+ на –****, то точка будет являться* ***точкой максимума****, если с* ***– на +****, то точка будет* ***точкой минимума****.*

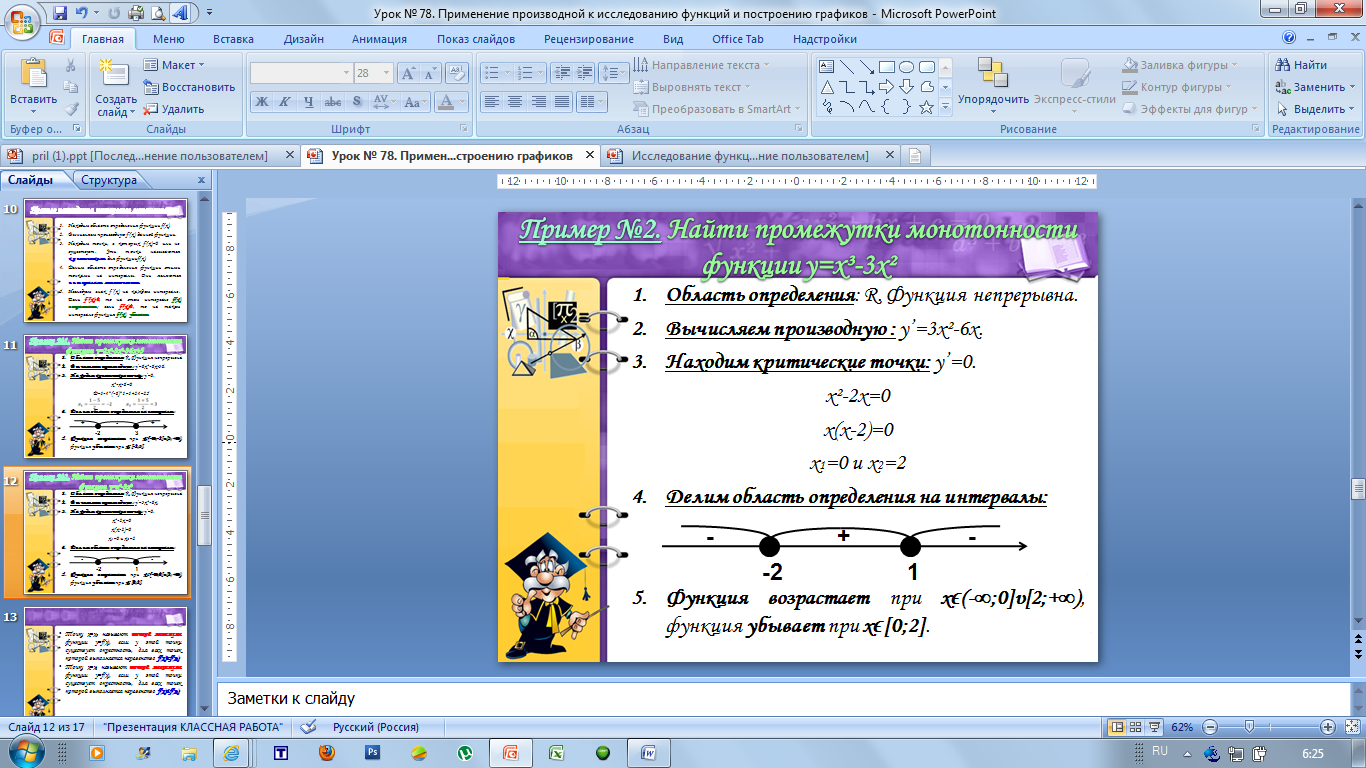
Рассмотрим теперь на примерах исследование функции на монотонность и экстремумы.

Пример №2. Найти экстремумы функции

1. **Область определения**: R. Функция непрерывна.
2. ***Вычисляем производную :***.
3. **Находим критические точки:** .

;

1. **Делим область определения на интервалы:**

**

1. **Функция убывает** при **(-∞;–2][1;+∞)**, функция **возрастает** при  **[–2; 1]**.
2. Видно, что в точке знак производной меняется с минуса на плюс. Поэтому критическая точка  **–точка минимума**. Найдём минимум функции . В точке знак меняется с плюса на минус. Поэтому критическая точка  **– точка максимума**. Найдём максимум функции: .

**Практическая часть**

1. Исследуйте функцию на монотонность:
2. *f* (*x*) *=* 2) *f* (*x*) *=* *–*

3) *f* (*x*) *=* 4) *f* (*x*) *=* 5

2. Исследуйте функцию на монотонность и постройте (схематически) её

график :

1. *f* (*x*) *=* 2) *f* (*x*) *=*

3) *f* (*x*) *=* 4) *f* (*x*) *=*